פיתוח פוריה

- פוריה (Fourier, 1763-1830) ניסה לתאר פתרונות של משוואת הדיפוזיה:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- קיימים פתרונות מחזוריים, מהסוג

$$T\left(x,t\right) = T_0\,\mathrm{e}^{-Dk^2 t}\sin kx$$

- מכיון שרוב הפתרונות אינם מחזוריים, ניתן לפרק אותם לסכום של פונקציות מחזוריות.
- כל אחת מהפונקציות המחזוריות היא פתרון של משוואת הדיפוזיה.
- גם הסכום המשוקלל של הפתרונות הוא פתרון, למרות שיכול להיות שאינו מחזורי.
- השיטה תקפה גם למשוואות אחרות, ולתיאור פונקציות לא מחזוריות סופיות.

משפט פוריה

- משפט פוריה:

כל פונקציה מחזורית ניתנת לתאור כסכום של פונקציות סינוס שארכי הגל שלהם הם שברים שלמים של אורך הגל של הפונקציה המחזורית המקורית.
רכיב האפס נכלל בשלמים.

- קיימים פתרונות מחזוריים, מהסוג

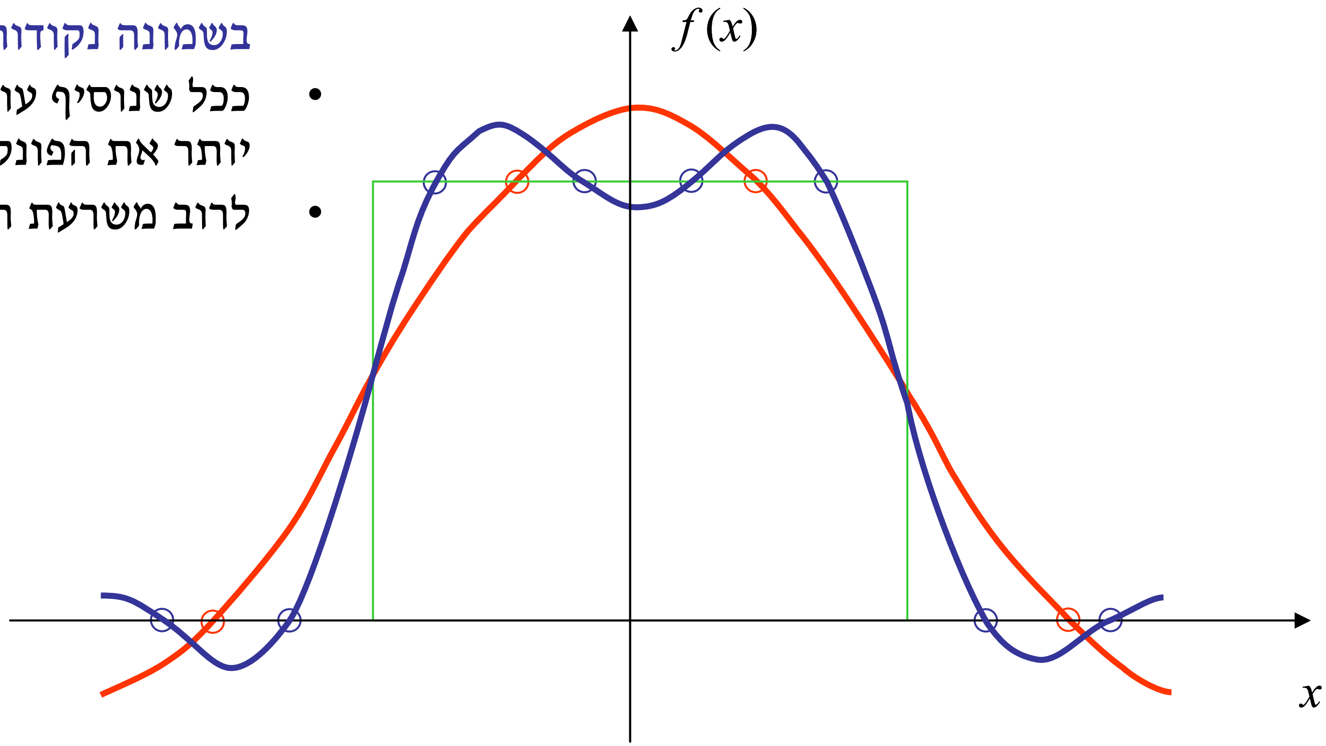
$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}C_0+C_1\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\alpha_1\right)+C_2\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda/2}+\alpha_2\right)+\cdots+C_n\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda/n}+\alpha_n\right)+\cdots$$

כאשר λ היא אורך הגל המקורי של הפונקציה $f(x)$.

- n הן ההרמוניות השונות, או סדרי האברים.
- תוספת של אברים רבים יותר משפרת את דיוק תיאור הפונקציה המקורית.

תאור גל מרובע

- נתאר גל מרובע.
- הסינוס הקרוב ביותר אליו נוגע בו בארבע נקודות.
- תוספת עוד סינוס גורמת לנגיעה בשמונה נקודות.
- ככל שנוסיף עוד נקודות נתאר טוב יותר את הפונקציה.
- לרוב משרעת הסינוסים הולכת ויורדת.



מקדמי פוריה

$$f(x)=\frac{1}{2}C_0+C_1\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\alpha_1\right)+C_2\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda/2}+\alpha_2\right)+\cdots+C_n\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda/n}+\alpha_n\right)+\cdots$$

- ניתוח פוריה של הפונקציה: קביעת המשרעות C והמופעים α.
- תאור חלופי של הסדרה:

$$C_n\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda/n}+\alpha_n\right)=C_n\cos\left(nk_0x+\alpha_n\right)=A_n\cos nk_0x+B_n\sin nk_0x$$

$$A_n=C_n\cos\alpha_n;\ B_n=C_n\sin\alpha_n;\ k_0=2\pi/\lambda$$

- ואז הפונקציה ניתנת לכתיבה בצורה

$$f(x)=\tfrac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos nk_0x+B_n\sin nk_0x\right)$$

מקדמי פוריה מרוכבים

$$f\left(x\right)=\tfrac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos nk_0x+B_n\sin nk_0x\right)$$

- תאור חלופי של הסדרה:

$$f\left(x\right)=\tfrac{1}{2}A_0+\sum_{n=?}^{?}F_n\exp ink_0x=\tfrac{1}{2}A_0+\sum_{n=?}^{?}\left(F_n\cos nk_0x+iF_n\sin nk_0x\right)$$

- מהשוואה לנוסחה למעלה, לא יכולה להיות התאמה בין אברים: $B_n = iF_n = iA_n$.
- מכפילים את התחום של n עד ל- ∞- ואז מקבלים גם מקדמים מהסוג F_{-n} ומכאן:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\exp ink_0x$$

$$F_n=\tfrac{1}{2}\left(A_n-iB_n\right)=\tfrac{1}{2}C_n\,\mathrm{e}^{i\alpha_n}$$

$$F_{-n}=\tfrac{1}{2}\left(A_n+iB_n\right)=\tfrac{1}{2}C_n\,\mathrm{e}^{-i\alpha_n}$$

$$F_0=\tfrac{1}{2}A_0$$

ניתוח פוריה

- מנצלים את העובדה שאינטגרל של מספר שלם של מחזורים מתאפס.
- אם כופלים סינוסים באורך מחזור שונה, האינטגרל שלהם על מספר שלם של מחזורים יתאפס.
- רק כאשר אורך המחזור שווה, ייתכן אינטגרל שונה מאפס.
- נבדוק עבור הרכיב ה-m. נחליף גם את קבוע האינטגרציה $\theta = k_0\, x$.

$$I_m = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\theta\right) \mathrm{e}^{-im\theta}\, \mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} F_n\, \mathrm{e}^{in\theta}\, \mathrm{e}^{-im\theta}\, \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} F_m\, \mathrm{d}\theta = 2\pi F_m$$

- המעבר בין השורות נובע מכך שכל האברים המעורבים נושרים.
- המקדם ה-m יהיה על כן

$$F_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\theta\right) \mathrm{e}^{-im\theta} \mathrm{d}\theta$$

- שכולל גם את רכיב ה-0

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\theta\right) \mathrm{d}\theta$$

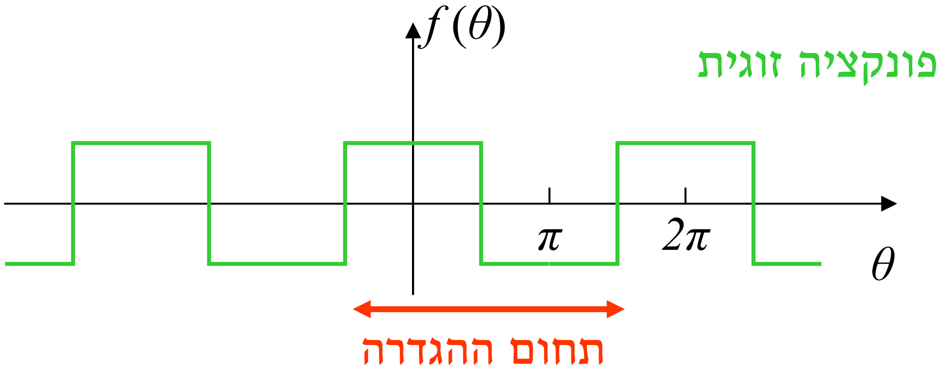
פונקציות זוגיות וממשיות

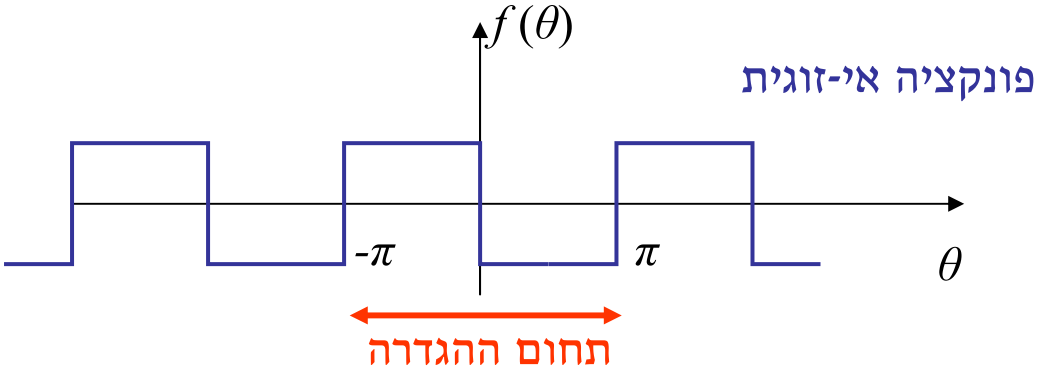
- בפונקציות זוגיות או סימטריות, אפשר להחליף את θ ב- $-\theta$ והפונקציה שומרת על ערכה.
- בפונקציות לא זוגיות, או א-סימטריות, אפשר להחליף את θ ב- $-\theta$ והפונקציה תהפוך את סימנה.
- נכתוב את טור פוריה כסכום סינוסים וקוסינוסים; החלק הסינוסי הוא אי זוגי, הקוסינוסי זוגי.
- מקבלים עבור פונקציות **זוגיות** $B_n = 0$ ולכן $F_n = F_{-n}$.
- מקבלים עבור פונקציות **אי-זוגיות** $A_n = 0$ ולכן $F_n = -F_{-n}$.
- אם הפונקציה המקורית $f(x)$ **ממשית**, אזי גם המקדמים A_n, B_n ממשיים. אזי $F_n = F_{-n}^*$. מכאן
- מקבלים עבור פונקציות **זוגיות ממשיות** $F_n = F_{-n}^* = F_{-n}$ ולכן F_n **ממשי**.
- מקבלים עבור פונקציות **אי-זוגיות ממשיות** $F_n = F_{-n}^* = -F_{-n}$ ולכן F_n **מדומה**.

גל מרובע

- שתי הפונקציות ממשיות, אבל בחירת המופע קובעת אם הן זוגיות אם לאו.
- עבור הפונקציה הזוגית למשל:

$$f(\theta)=\begin{cases} 1 & \in\left[-\frac{\pi}{2}<\theta\le\frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \in\left[\frac{\pi}{2}<\theta\le\frac{3\pi}{2}\right]\end{cases}$$





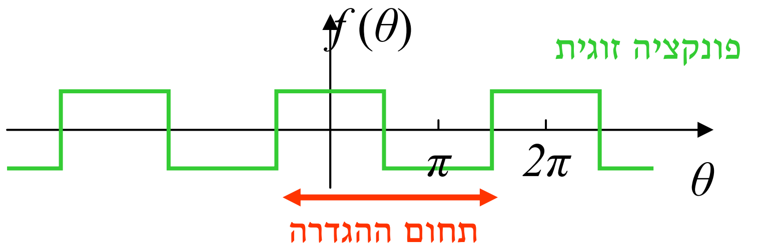
רכיבי גל מרובע

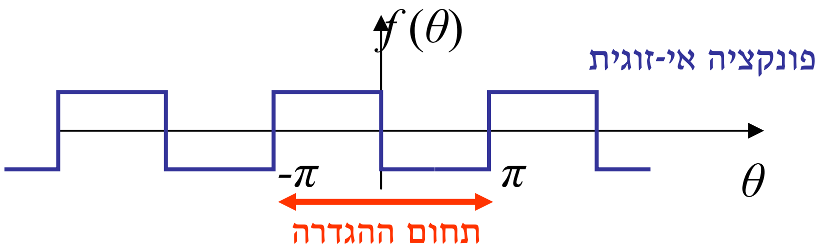
רכיבי פוריה:

$$F_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{e}^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-in\theta}\right)$$



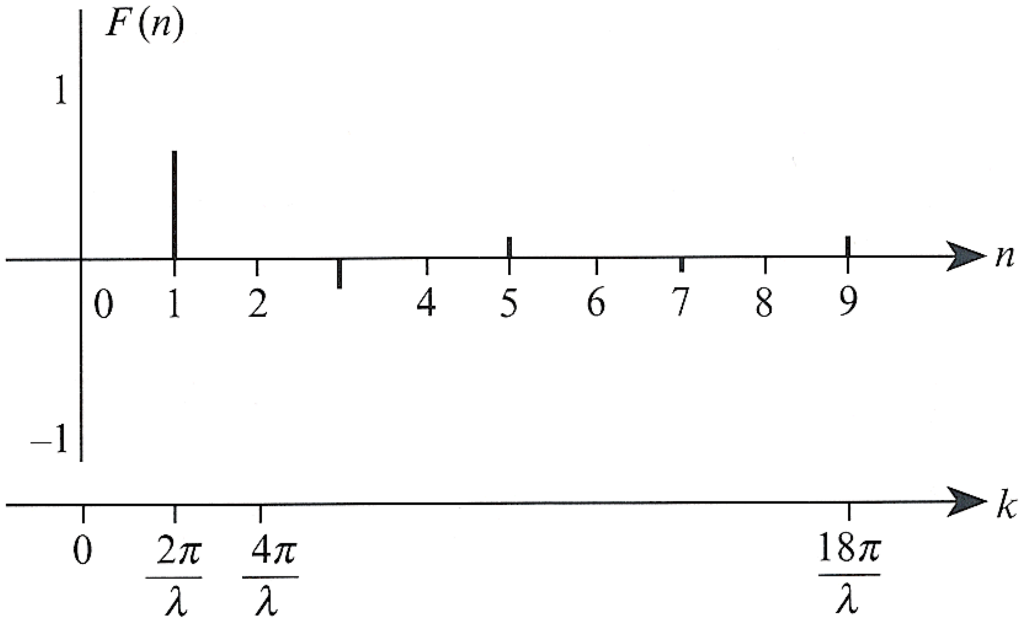


מקדמי פוריה, F_n

מס' n	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
ערך F_n	2/5π	0	-2/3π	0	2/π	0	2/π	0	-2/3π	0	2/5π

מרחב הפכי

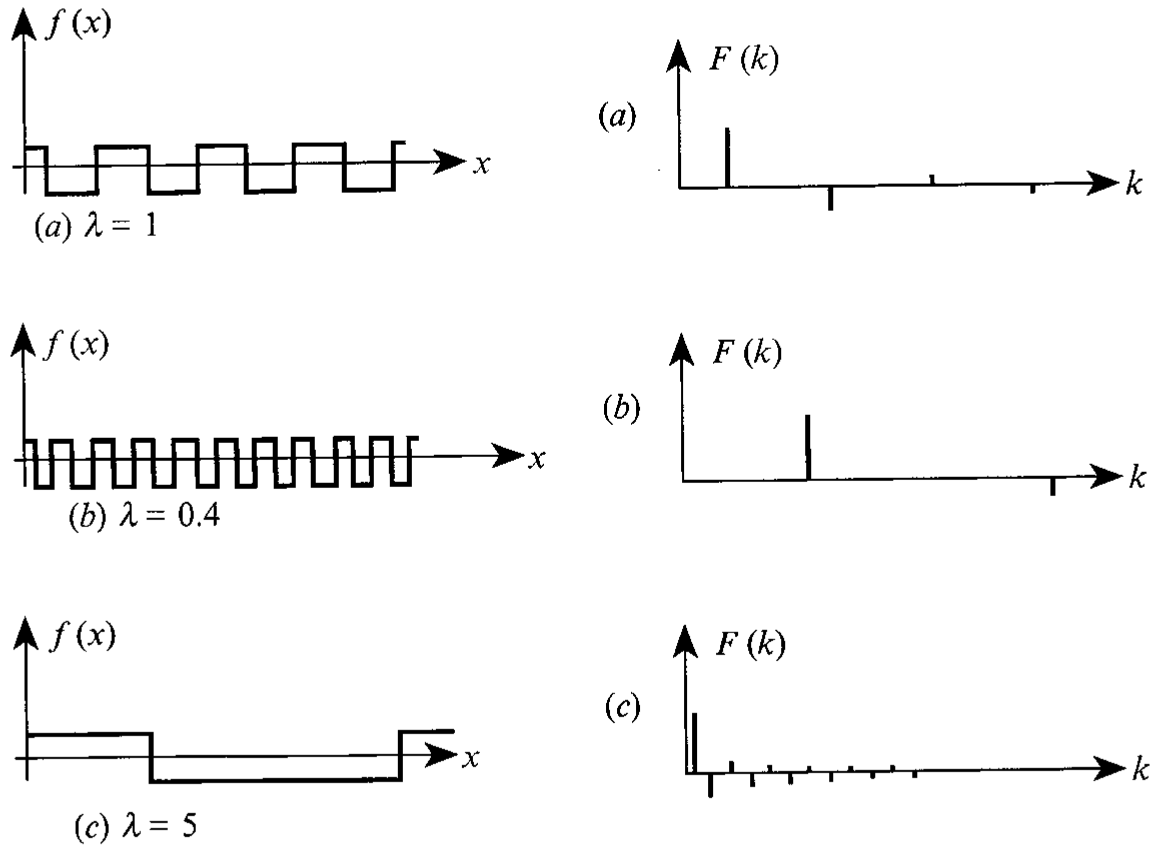
- ניתן לחשוב על F_n כפונקציה לא רציפה $F(n)$.
- ערך הפונקציה הוא אפס בין המספרים השלמים n.
- ניתן לשחזר את הפונקציה המקורית מתוך $F(n)$.
- נוח יותר לעבוד עם המשתנה $k = n\, k_0 = 2\,\pi\, n / \lambda$.
- הפונקציה במרחב ההפכי, מרחב k, תהיה



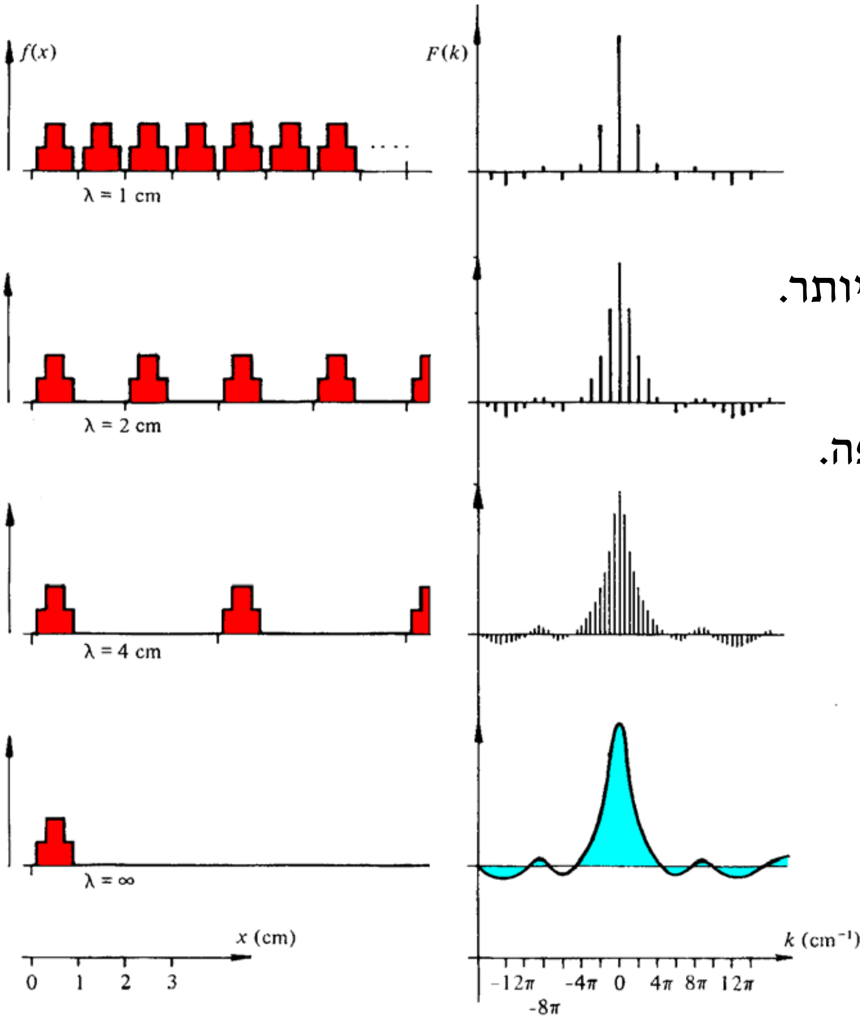
$$F(k) = \frac{1}{\lambda}\int_{x_0}^{x_0+\lambda} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

מרחב הפכי וישיר

- גלים מרובעים, אינסוף מחזורים.
- כאשר הצפיפות במרחב הרגיל גדלה, היא פוחתת במרחב ההפכי, ולהפך.
- מתוך $k = n\,k_0 = 2\,\pi\,n\,/\,\lambda$ נובע ש k הפכי ל- λ.



הרחבת טור פוריה

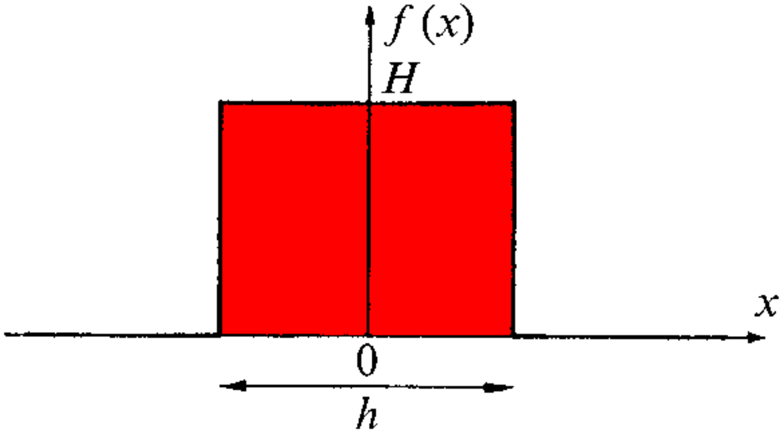


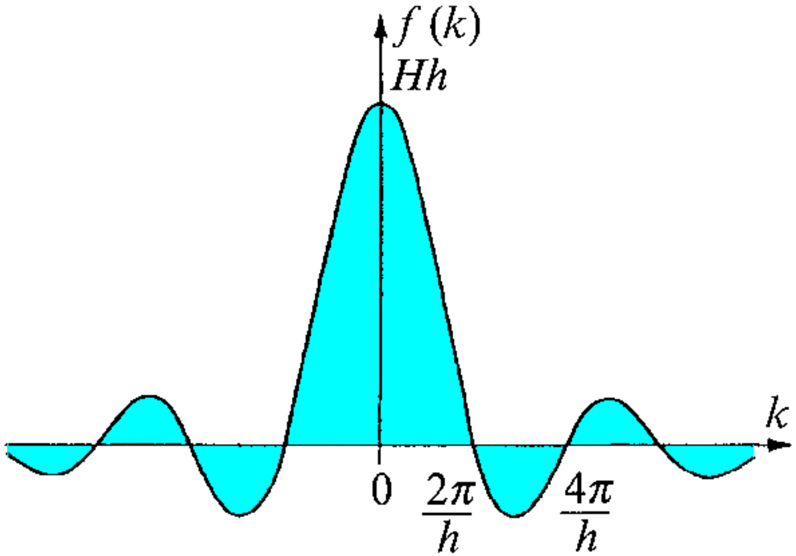
- רוב הבעיות המענינות אותנו נובעות מפונקציות לא מחזוריות.
- ניתן להרחיב את שיטת פוריה להתמרת פוריה.
- נגדיר את אורך הגל כאורך הפונקציה, ועוד מעט.
- נאריך את התוספת עוד ועוד, ועל ידי כך את אורך הגל.
- בגלל העלאת התדר המירבי, הסדרה נעשית צפופה יותר ויותר.
- מעטפת הסדרה תלויה בפונקציה המקורית ואינה משתנה.
- כאשר אורך הגל שואף לאינסוף, מתקרבת ההתמרה לרציפה.
- מתמטית, מגדירים את ההתמרה

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-ikx} \, \mathrm{d}x$$

- טור פוריה הוא דגימה של אינטגרל פוריה.
- נקודות הדגימה הן $n\,k_0 = n/\lambda$.

התמרת הלם מרובע





נחשב את ההתמרה של הלם מרובע:

$$
\begin{aligned}
F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-ikx}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} H\, \mathrm{e}^{-ikx}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{H}{-ik}\left[\mathrm{e}^{-ikh/2} - \mathrm{e}^{ikh/2}\right] \\
&= Hh\frac{\sin(kh/2)}{kh/2} \\
&\equiv Hh\,\mathrm{sinc}(kh/2)
\end{aligned}
$$

בגלל הסימטריה של ההלם, ההתמרה ממשית.

הופכיות ההתמרה

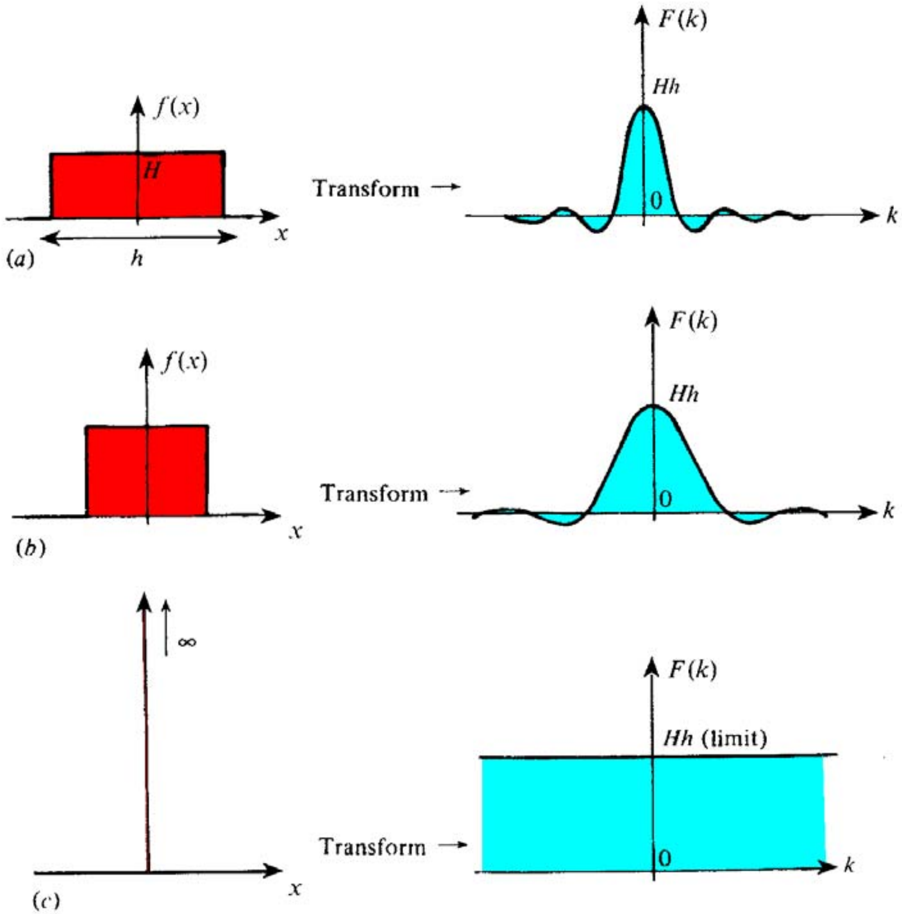
• תלות ההתמרה ברוחב ההלם המרובע h:

$$F\left(k\right) = Hh\,\mathrm{sinc}\left(kh/2\right)$$

• ככל ההלם צר יותר, ההתמרה רחבה יותר.

• כאשר ההלם מצטמצם לרוחב אפסי, רוחב ההתמרה אינסופי.

• כאשר ההלם רחב אינסופית, ההתמרה מצטמצמת לרוחב אפס.



פונקצית δ של דיראק

- נשאיף את הרוחב h של ההלם המרובע לאפס תוך שמירת השטח קבוע, $H\,h = 1$.
- זוהי פונקצית δ של דיראק.
- ערך הפונקציה בראשית הוא אינסופי, בשאר התחום היא אפס.
- התמרת פונקצית δ של דיראק היא יחידה:

$$F(k) = Hh\,\mathrm{sinc}(kh/2) = \mathrm{sinc}(kh/2)$$

- כאשר רוחב ההלם שואף לאפס, ההתמרה הופכת ליחידה.
- פונקצית ה- δ דוגמת כל פונקציה אחרת:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a)$$

הזזת הראשית

- ניקח פונקציה כלשהי, ונזיז אותה מן הראשית:

$$g(x) = f(x-a)$$

- מה קורה להתמרת הפונקציה המוזזת? נסמן $y = x - a$:

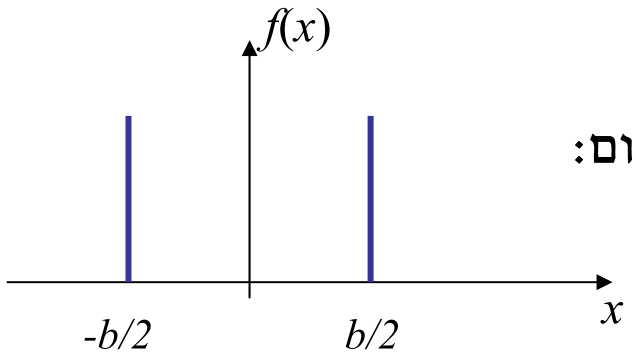
$$\begin{aligned} G(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}\,x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\mathrm{e}^{-ik(y+a)}\,\mathrm{d}\,y \\ &= \mathrm{e}^{-ika}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\mathrm{e}^{-iky}\,\mathrm{d}\,y \\ &= \mathrm{e}^{-ika}F(k) \end{aligned}$$

- התוצאה שונה מהתמרה הפונקציה המקורית בגורם מופע בלבד.
- משרעות שתי הפונקציות עדיין שוות.

פונקציות δ

- נבנה סכום של פונקציות δ :

$$f(x)=\sum_n \delta(x-x_n)$$



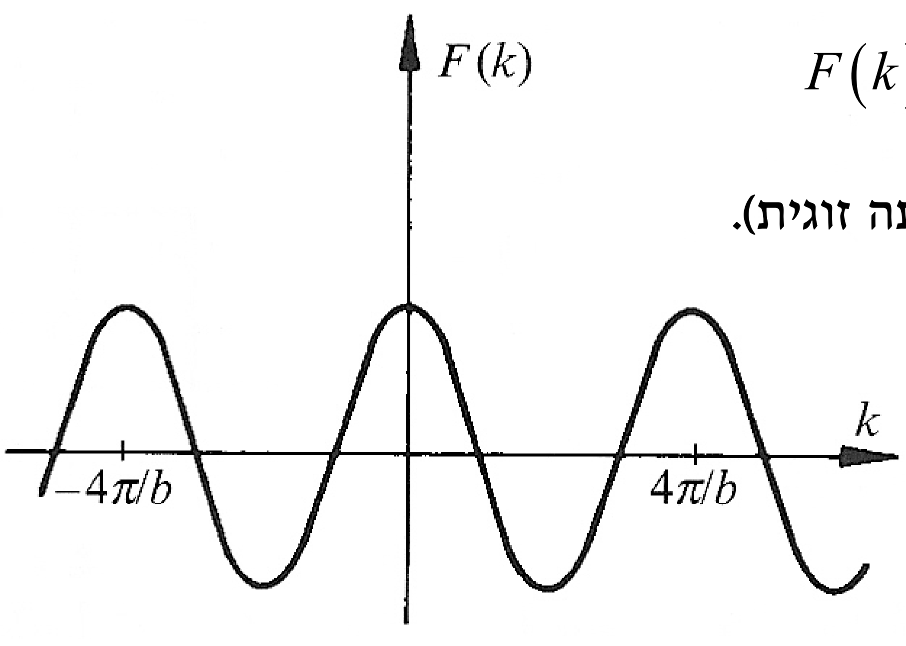
- התמרה של פונקצית δ יחידה היא 1. לכן ההתמרה של הסכום:

$$F(k)=\sum_n \mathrm{e}^{-ikx_n}$$

- למשל, עבור $n=2$ ומיקומים $x_n=\pm b/2$:

$$F(k)=2\cos\frac{kb}{2}$$

- זוהי פונקציה ממשית (הפונקציה המקורית היתה זוגית).



פונקצית מסרק

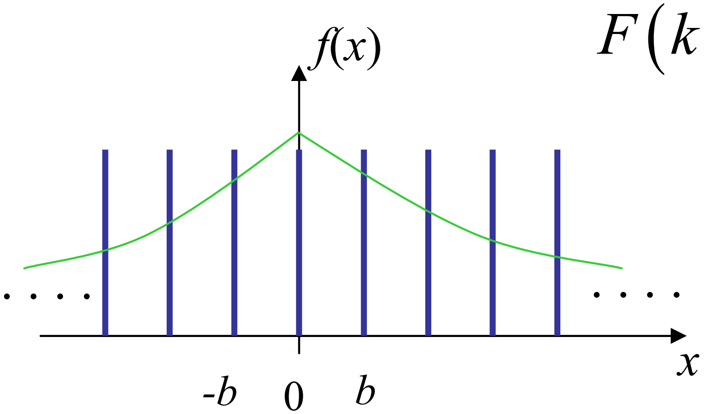
- נבנה מסרק אינסופי של פונקציות δ במרחקים שוים b:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nb)$$

- ההתמרה של המסרק:

$$F(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-iknb}$$

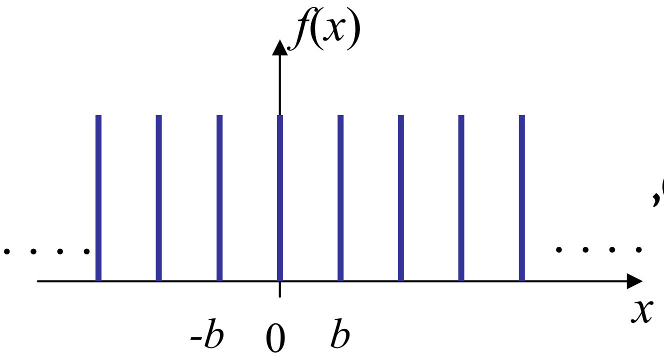
- זוהי פונקציה המשתרעת לאינסוף משני הכוונים, והאינטגרל שלה אינסופי.
- אין משמעות מתמטית לאינטגרל, אבל פיסיקלית הוא יכול להיות קיים.
- ננחית לאט את המסרק בערכים גדולים על ידי כפל בפונקציה $\exp\text{-}s|n|$.

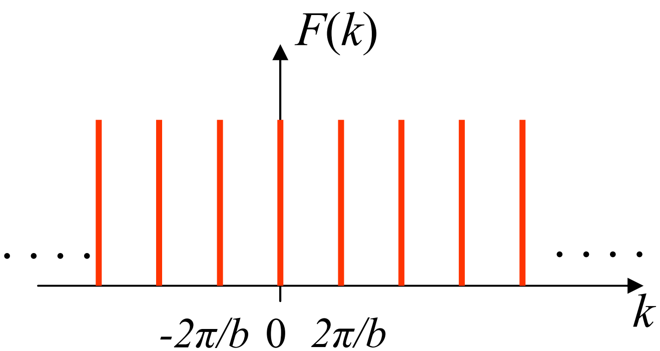


$$F(k)=\sum_{n=-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-ikbn-sn}+\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-ikbn+sn}-1$$

$$=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-ikb-s}}+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{ikb-s}}-1$$

התמרת פונקצית מסרק





$$F\left(k\right)=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-ikb-s}}+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{ikb-s}}-1$$

- זוהי פונקציה מחזורית עם שיאים בנקודות $k = 2\pi m / b$ (m שלם), ובגובה

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-s}}-1\approx\frac{2}{s}$$

- בפיתוח המעריכים בסדר שני, מקבלים שרוחב השיאים הוא $2s/b$.
- כאשר $s\to 0$ רוחב השיאים אף הוא שואף לאפס; הם נראים כמסרק של פונקציות δ:

$$F\left(k\right)=\frac{4}{b}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(k-\frac{2\pi m}{b}\right)$$

- המקדם המספרי הוא שטח השיא, ותלוי בשיטת החישוב.

הגאוסיאן

$$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

- התמרת הגאוסיאן תהיה

$$F\left(k\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}\,x$$

- משלימים את הריבוע במעריך ומקבלים

$$F\left(k\right)=\exp\left(-k^2\frac{\sigma^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\left(\frac{x}{\sqrt{2\sigma^2}}+ik\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}\right)^2\right]\mathrm{d}\,x$$

- האינטגרל אינו תלוי ב- k:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\,r=\sqrt{2\pi\sigma^2}$$

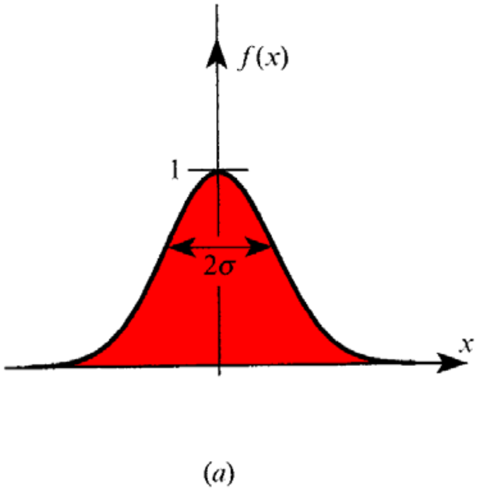
התמרת הגאוסיאן

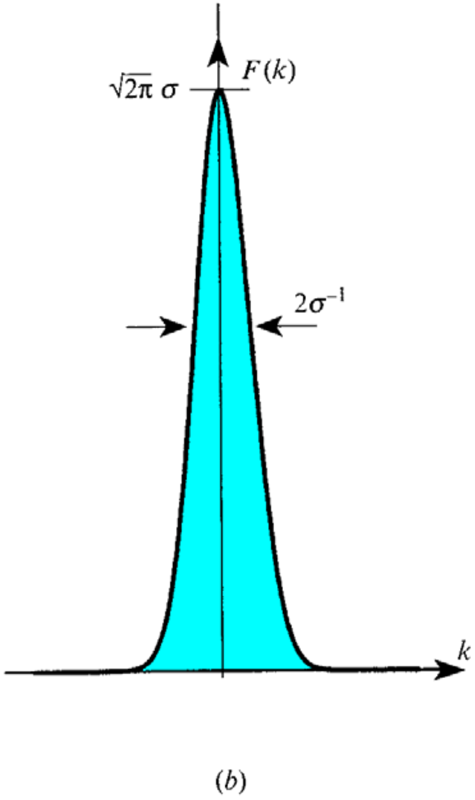
$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

התמרת הגאוסיאן היא

$$F(k) = \sqrt{2\pi\sigma^2}\, e^{-k^2\frac{\sigma^2}{2}}$$

שהיא עצמה גאוסיאן, ברוחב הפכי לרוחב הגאוסיאן המקורי.





פונקציות מרוכבות

- אם הפונקציה מרוכבת, כמו שקורה ברוב המקרים באופטיקה, ניתן לחשב את התמרתה.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}x\right\}^* = F^*(-k)$$

- אם הפונקציה המקורית ממשית, התמרתה מקיימת $F(k) = F^*(-k)$
- אם הפונקציה המקורית זוגית, התמרתה מקיימת $F(k) = F(-k)$
- אם הפונקציה המקורית אי זוגית, התמרתה מקיימת $F(k) = -F(-k)$
- אם הפונקציה המקורית ממשית וזוגית, התמרתה ממשית $F(k) = F(-k) = F^*(-k)$
- אם הפונקציה המקורית ממשית אי זוגית, התמרתה מדומה $F(k) = -F(-k) = F^*(-k)$
- בכל המקרים $|F(k)|^2 = |F(-k)|^2$

התמרת הילברט

- מהי הפונקציה המרוכבת הקשורה בפונקציה ממשית נתונה?
- תהי הפונקציה הממשית $f^R(x)$. פונקציה זו מקיימת

$$f^R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \mathrm{e}^{-ikx} \, \mathrm{d}k$$

- הפונקציה המרוכבת הקשורה איתה תהיה $f(x) = f^R(x) + if^I(x)$ המקיימת

$$f(x) = 2\int_{0}^{\infty} F(k) \mathrm{e}^{-ikx} \, \mathrm{d}k$$

- ואכן החלק הממשי של $f(x)$ הוא $f^R(x)$.
- $f(x)$ היא התמרת הילברט של $f^R(x)$.